5

Circuitos resistivos alimentados com onda senoidal

5.1 Material

- Gerador de funções;
- osciloscópio;
- multímetro;
- resistor de 1 kΩ;
- indutores de 9,54, 23,2 e 50 mH.

5.2 Introdução

Nas aulas anteriores estudamos o comportamento de circuitos compostos de resistores, capacitores e indutores quando excitados por uma tensão que oscila bruscamente entre 2 valores. Observamos comportamentos transientes, caracterizados por constantes de tempo curtas, com valores da ordem de milissegundos. Essas observações só foram possíveis graças ao uso do osciloscópio.

A partir desta aula, estudaremos o comportamento de resistores, capacitores e indutores quando submetidos a voltagens senoidais, ou seja, voltagens que variam no tempo descrevendo uma função seno. Estudaremos como a amplitude da tensão sobre cada um dos elementos varia com a frequência do sinal de excitação. Mostraremos também as condições em que ocorrem diferenças de fase entre a corrente e a voltagem. Introduziremos o conceito de impedância para compreendermos os comportamentos observados.

Inicialmente, faremos uma breve introdução a respeito dos sinais senoidais.

5.2.1 Sinais senoidais

Quando estamos lidando com circuitos elétricos, sinais senoidais são voltagens que variam no tempo descrevendo uma função do tipo senóide. Esses sinais podem ser produzidos por um gerador de ondas (como aquele utilizado nos experimentos anteriores) e são representados em sua forma mais geral por uma função do tipo

$$V_{\mathrm{G}}(t) = V_0\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta), \tag{5.1}$$

onde V_0 é o que chamamos de amplitude da forma de onda. V_0 é o valor da voltagem quando a função seno é igual à unidade, ou seja, é o valor máximo da voltagem gerada. A amplitude também é chamada de "valor de pico" da função, e seu valor é sempre positivo.

Quando a função seno atinge o valor -1, a voltagem tem seu valor mínimo $-V_0$. Portanto um sinal senoidal oscilará entre os valores extremos $-V_0$ e $+V_0$ e a diferença entre esses valores é o que chamamos de "valor pico-a-pico" da voltagem, normalmente representado por V_{PP}. A partir dessa definição, fica óbvio que

$$V_{\mathrm{PP}} = 2\,V_0\,. \tag{5.2}$$

Para determinarmos a amplitude de um sinal senoidal utilizando um osciloscópio, é preciso medir a diferença (em módulo) entre o máximo valor que a voltagem assume e o "zero" da função (o "zero" do canal ao qual o sinal está conectado). Alternativamente, pode-se simplesmente medir a diferença (também em módulo) entre os valores máximo e mínimo da função (que vem a ser a tensão pico-a-pico) e dividir o valor por dois. A figura 5.1 ilustra essas definições.

O símbolo ω representa a frequência angular da senóide e é definida por

$$\omega = 2\,\pi f, \tag{5.3}$$

onde f é a frequência linear (ou simplesmente frequência) da senóide, representando o número de oscilações realizadas por unidade de tempo. Como o período T da onda representa o tempo necessário para a realização de uma oscilação completa, obtemos a relação entre frequência e período:

$$f = \frac{1}{T}\,. \tag{5.4}$$

O argumento da função seno $(\omega t+\theta)$ é chamado de fase da senóide, e θ é denominado de constante de fase. Esta é uma constante arbitrária que é utilizada para determinar o valor

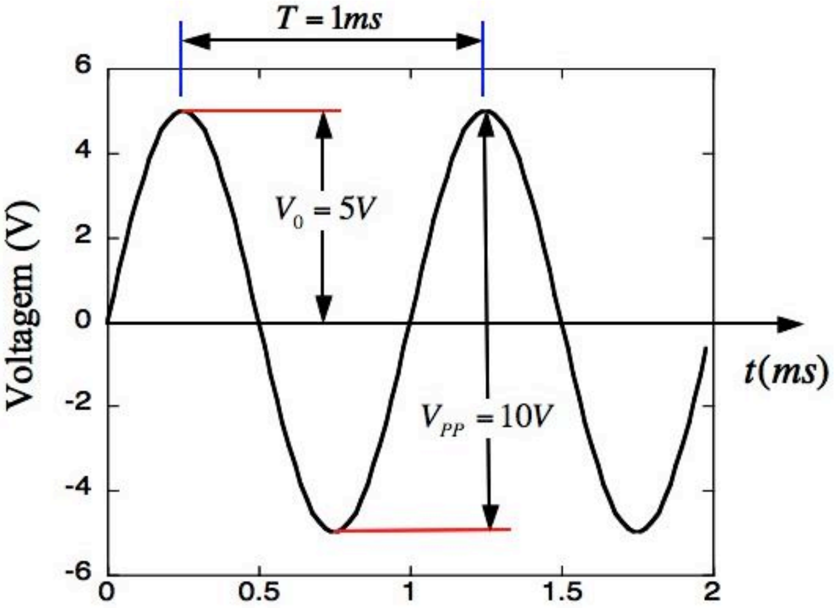

Figura 5.1: Figura que mostra os parâmetros que definem uma forma de onda senoidal. No exemplo apresentado, temos $V_0 = 5$ V, (o que significa que $V_{\rm PP} = 10$ V) e $T = 1$ ms (o que equivale a dizer que $f = 1$ kHz). Note que $\theta = 0$.

da função em $t = 0$ (a partir da equação 5.1 vê-se imediatamente que $V(t = 0) = V_0$ sen θ).

Em nossos procedimentos experimentais definiremos a função que representa o sinal produzido pelo gerador como aquela representada pela linha sólida da Figura 5.2; esta será nossa função de referência. Isso significa que para esse sinal escolhemos arbitrariamente $\theta = 0$ na equação 5.1. Na prática o valor da constante de fase só é relevante se estivermos comparando duas (ou mais) funções senoidais. Nesse caso a constante de fase θ serve essencialmente para determinar a diferença de tempo que uma senóide leva para chegar à mesma fase de outra senóide tomada como referência. Portanto se representamos o sinal de referência como $V_{01}\,\mathrm{sen}(\omega t)$, o sinal representado por $V_{02}\,\mathrm{sen}(\omega t{+}\theta)$ possui uma diferença de fase θ.

A título de exemplo, sejam $V_1(t)$ e $V_2(t)$ duas voltagens que variam senoidalmente em função do tempo com a mesma frequência. Se elas atingem seus respectivos valores máximos em instantes de tempo diferentes é porque existe uma diferença de fase entre elas. A figura 5.2 mostra duas funções defasadas em relação a um sinal $V_{\rm G}(t)$ tomado como referência, uma apresentando uma defasagem de $+\,\pi/4$ radianos (ou $+\,45°$) e a outra apresentando uma defasagem de $-\,\pi/4$ radianos (ou $-\,45°$)

Na figura 5.2 a linha contínua representa a voltagem de referência, que assume o valor zero em $t = 0$. Quando $V_{\rm G}(t)$ passa pela linha de zero volt com derivada positiva (isto é, crescendo) $V_2(t)$ tem um valor positivo e $V_1(t)$ tem um valor negativo. Dizemos então que a fase de $V_2(t)$ está adiantada, enquanto a fase de $V_1(t)$ está atrasada (ambas em relação ao sinal de referência). Essas três funções podem ser representadas pelas seguintes

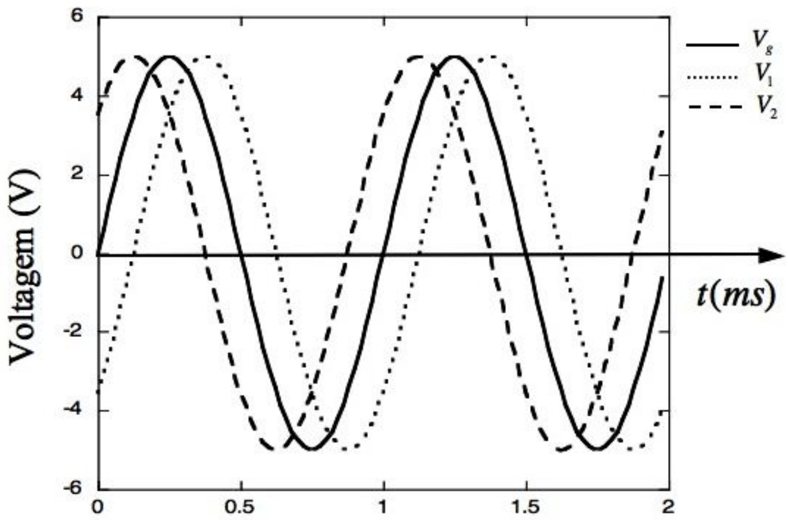

Figura 5.2: Voltagens que possuem a mesma amplitude e frequência, mas com diferenças de fase entre si. Tomando o sinal representado pela linha contínua como referência, a linha pontilhada (V_1) representa um sinal com uma defasagem de $-\pi/4$ radianos, enquanto o sinal representado pela linha tracejada (V_2) possui uma defasagem de $+\pi/4$ radianos.

expressões:

$$V_{\rm G}(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t), \tag{5.5}$$

$$V_1(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t - \pi/4), \tag{5.6}$$

$$V_2(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t + \pi/4), \tag{5.7}$$

com $V_0 = 5$ V e $T = 1$ ms.

Voltagens do tipo senoidal são as mais simples de serem produzidas, e também as mais simples de serem tratadas matematicamente. Por isso são as formas de onda mais comumente encontradas: a voltagem presente nas tomadas das residências é senoidal, e por isso chamada de "corrente alternada". A eletricidade produzida por geradores em usinas hidrelétricas é resultado de voltagens induzidas pela rotação de turbinas, voltagens essas descritas por funções senoidais.

Uma das grandes vantagens da utilização de senos (ou cossenos) para representar sinais elétricos vem do fato que essa classe de funções são soluções de equações diferenciais que descrevem muitos fenômenos encontrados na natureza, incluindo circuitos elétricos lineares.

O instrumento ideal para a observação e medida de sinais elétricos alternados é o osciloscópio. Entretanto voltímetros (ou multímetros digitais) também podem ser utilizados, uma vez que se conheça suas limitações. Como um sinal alternado possui um valor médio nulo, quando utilizamos a opção "V a.c." de um voltímetro, o sinal passa por um dispositivo chamado "retificador de onda completa", que transfoma a função $V_0\,\text{sen}(\omega t)$ em $V_0\,|\text{sen}(\omega t)|$, que só assume valores positivos. Nesse caso o valor medido para a voltagem é chamado de valor eficaz, que é definido como a raiz quadrada do valor médio do quadrado de $V(t)$:

$$V_{\text{ef}} = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \left[V_0\,\text{sen}(\omega t)\right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\,. \tag{5.8}$$

Por exemplo, o valor da voltagem na rede elétrica doméstica é 127 V. Esse é o valor eficaz, o quê significa que a amplitude da tensão na rede é $V_0 = 179,6$ V.

Multímetros sempre medem valores eficazes de tensão, e são geralmente calibrados para a frequência de 60 Hz (frequência da rede elétrica). Portanto suas medidas só são confiáveis para sinais com frequências próximas deste valor.

5.2.2 Resistores em corrente alternada

Circuitos lineares, como o próprio nome indica, são aqueles nos quais as voltagens e correntes se relacionam de forma linear. é o caso de resistores, para os quais a Lei de Ohm (estudada na primeira aula) mostra que a tensão aplicada é proporcional à corrente, com a constante de proporcionalidade sendo chamada de resistência. Isso foi verificado nos experimentos anteriores, para resistores submetidos a tensões constantes; mas a Lei de Ohm também vale para os casos em que os resistores estão sujeitos a tensões alternadas. Considere um resistor com uma resistência $R = 1\,\text{k}\Omega$ submetido a uma tensão $V_{\text{G}}(t) = V_0\,\text{sen}(\omega t)$. Pela Lei de Ohm a corrente no resistor será dada por:

$$i(t) = \frac{V_{\text{G}}(t)}{R} = \frac{V_0}{R}\,\text{sen}(\omega t) = i_0\,\text{sen}(\omega t), \tag{5.9}$$

onde definimos $i_0 \equiv V_0/R$. A equação 5.9 mostra alguns fatos interessantes: a corrente que atravessa o resistor também é uma sinal senoidal, e que oscila com a mesma frequência da tensão aplicada. Essas são características de circuitos lineares. Além disso, podemos notar que não há nenhuma diferença de fase entre a voltagem e a corrente. A figura 5.3 mostra os gráficos para corrente e voltagem em função do tempo, para um sinal com amplitude $V_0 = 5$ V e período $T = 1$ ms.

Note que a partir da definição de i_0, podemos calcular a resistência em termos das am-

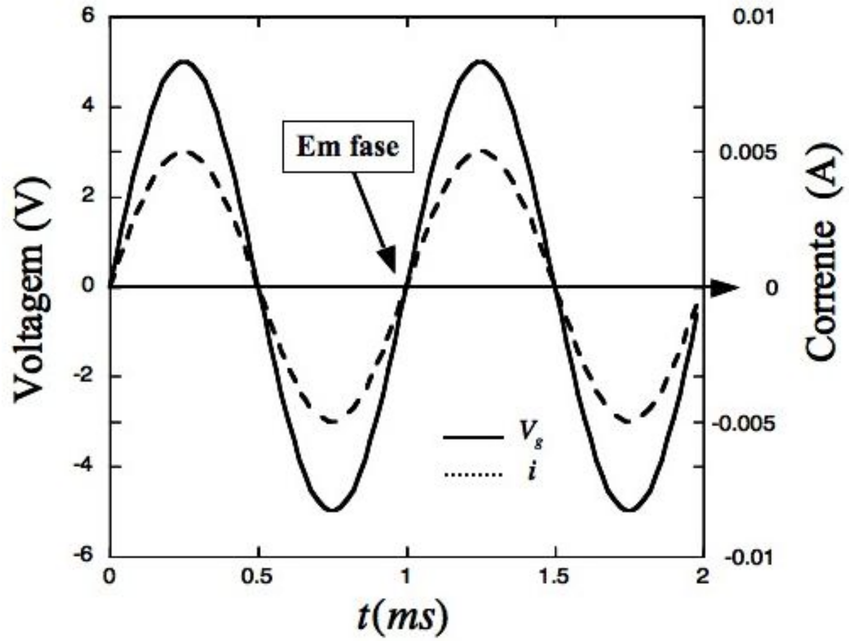

Figura 5.3: Voltagem (linha sólida) e corrente (linha tracejada) para um resistor de $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ submetido a uma tensão alternada com 5 V de amplitude e 1 kHz de frequência.

plitudes de tensão e corrente:

$$R = \frac{V_0}{i_0}\,. \tag{5.10}$$

A equação 5.10 mostra que a amplitude de corrente não depende da frequência do sinal aplicado; este é um resultado extremamente importante, pois nos permite determinar a amplitude de corrente num circuito simplesmente medindo a amplitude de tensão no resistor e dividindo este valor pela resistência.

5.3 Procedimentos experimentais

5.3.1 Procedimento I: uso do multímetro e do osciloscópio para medidas de tensão alternada

Selecione a forma de onda senoidal com amplitude de 4 V no gerador de sinais e conecte sua saída ao canal 1 do osciloscópio. Conecte também o multímetro digital de bancada ao gerador para medir sua voltagem, de acordo com a figura 5.4. Selecione uma frequência próxima de 60 Hz e faça as seguintes medidas com o sinal produzido:

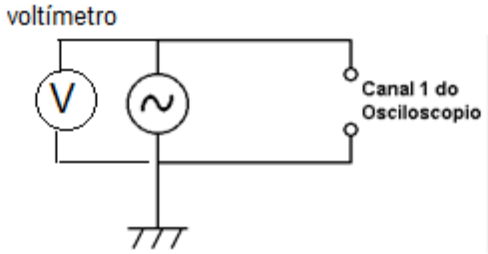

Figura 5.4: Circuito a ser utilizado no Procedimento I.

1. meça a frequência do sinal senoidal com o osciloscópio (lembre-se que isso pode ser feito de 2 maneiras: usando o sistema de gratículas para medir o período e utilizar a equação 5.4 ou então utilizar o menu "Medidas"); lembre-se também que a frequência mostrada pelo gerador de funções representa apenas uma indicação de frequência;

2. meça a amplitude do sinal senoidal com o osciloscópio (seja utilizando o sistema de gratículas ou o menu "Medidas");

3. meça a voltagem com o multímetro (selecione a opção "Voltagem AC");

Repita agora essas medidas para uma frequência de 3 kHz, apresente seus resultados na Tabela 1 e comente os resultados obtidos. Ao mudar a frequência, verifique pelo osciloscópio se a amplitude do sinal do gerador continua igual a 4 V e, caso ela tenha mudado, corrija para o valor inicial.

Tabela 1

$f \pm \sigma_{\mathrm{f}}$	$V_0 \pm \sigma_{\mathrm{V_0}}$ (V)	$V \pm \sigma_{\mathrm{V}}$ (V)

5.3.2 Procedimento II: circuitos resistivos com tensão senoidal

Neste procedimento estamos interessados em verificar que a Lei de Ohm de fato se aplica a um resistor quando submetido a voltagens e correntes senoidais. A idéia é realizar com o osciloscópio medidas simultâneas das **amplitudes** de tensão e corrente e verificar graficamente se existe uma relação linear entre V_0 e i_0, como previsto pela equação 5.10. Caso essa relação seja observada, será possível obter o valor da resistência e comparar com outra medida (como aquela obtida utilizando um multímetro digital, por exemplo).

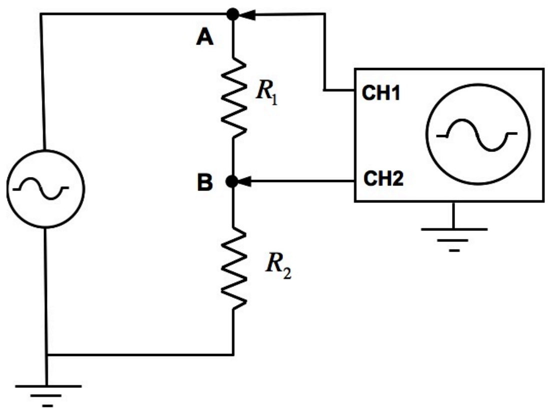

Figura 5.5: Circuito a ser utilizado no Procedimento II.

Lembre-se que o osciloscópio mede voltagens, portanto para medir a amplitude de corrente utilizamos um expediente muito comum, que é inserir um segundo resistor em série, medir a amplitude de tensão sobre ele e calcular a corrente como $i(t) = V(t)/R$.

1. Monte o circuito da figura 5.5, usando os resistores $R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ e $R_2 = 100\,\Omega$. R_1 é o resistor para o qual desejamos verificar a Lei de Ohm enquanto R_2 é utilizado para calcular a amplitude de corrente. Meça os valores das duas resistências com o multímetro, e anote seus valores com as respectivas incertezas.

2. Selecione um sinal senoidal no gerador de funções, com uma frequência próxima de 500 Hz. Você deve observar uma figura semelhante à figura 5.3. Com o osciloscópio meça a frequência do sinal do gerador, com sua incerteza. O sinal da corrente possui frequência igual ou diferente? Há diferença de fase entre esses dois sinais?

3. Ajuste a amplitude da tensão no gerador de modo que a amplitude de tensão sobre o resistor R_2 (medida no canal 2) seja $V_{0\mathrm{R2}} = 0,30$ V e com esse valor calcule a amplitude de corrente como $i_0 = V_{0\mathrm{R2}}/R_2$. Note que o sinal medido no canal 1 é a tensão do gerador (com amplitude $V_{0\mathrm{G}}$, medida no canal 1) e para construirmos o gráfico desejado precisamos da amplitude de tensão sobre o resistor R_1, que pode ser calculada simplesmente como a diferença

$$V_{0\mathrm{R1}} = V_{0\mathrm{G}} - V_{0\mathrm{R2}}\,. \tag{5.11}$$

4. Repita agora a medida para outros cinco valores de $V_{0\mathrm{R2}}$, sempre ajustando a amplitude de voltagem no gerador para que a amplitude $V_{0\mathrm{R2}}$ aumente em intervalos de 0,10 V. Complete a Tabela 2 com esses dados.

5. Faça um gráfico de $V_{0\mathrm{R1}}$ versus i_0 e comente sobre o comportamento observado. Obtenha o valor de R_1 a partir desse gráfico e compare com o valor obtido na medida direta com o multímetro, comentando seu resultado. Este resultado seria diferente se a frequência do sinal do gerador fosse diferente de 500 Hz?

Tabela 2

$V_{\mathrm{0R2}} \pm \sigma_{\mathrm{V0R2}}$	$i_0 \pm \sigma_{\mathrm{i0}}$ (A)	$V_{\mathrm{0G}} \pm \sigma_{\mathrm{V0G}}$ (V)	V_{0R1} (V)	σ_{V0R1} (V)
0,30				
0,40				
0,50				
0,60				
0,70				
0,80				