7

Circuitos RC e filtros de frequência

7.1 Material

- Gerador de funções;
- osciloscópio;
- multímetros digitais (de mão e de bancada);
- resistor de 1 kΩ;
- capacitor de 100 nF.

7.2 Introdução

Vimos que a reatância capacitiva depende da frequência: quanto maior a frequência do sinal que alimenta um capacitor, menor será a resistência que o componente oferecerá à passagem da corrente. Essa propriedade pode ser utilizada para a confecção de filtros de frequência que atenuem sinais com certos valores de frequência num dado circuito elétrico. Os filtros que cortam os sinais com frequências abaixo de um certo valor são chamados de "filtros passa-alta", ao passo que aqueles que cortam sinais com frequências acima de um dado valor chamam-se "filtros passa-baixa". A combinação dos dois tipos de filtros pode resultar num outro tipo de filtro (chamado de passa-banda) que deixa passar somente sinais com frequências próximas de um certo valor, atenuando todos os sinais com frequências acima e abaixo deste valor; desta forma o filtro define uma banda passante.

Aplicando as definições de reatância capacitiva e impedância discutidas anteriormente, as amplitudes das voltagens no capacitor (V_{0C}) e no resistor (V_{0R}) em um circuito RC em série podem ser escritas como:

$$V_{0C} = \frac{X_C}{Z} V_0 \tag{7.1}$$

e

$$V_{0R} = \frac{R}{Z} V_0 \,, \tag{7.2}$$

onde V_0 é a amplitude da voltagem de alimentação do circuito, $X_C = 1/\omega C$ é a reatância capacitiva, R é a resistência e $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ a impedância do circuito. Observe que o termo "resistência" aplica-se somente ao resistor. Para o capacitor utiliza-se o termo "reatância capacitiva" e para a "resistência total do circuito" empregamos o termo "impedância". Os filtros deixarão passar certas faixas de frequência dependendo da escolha de qual dispositivo será usado para obter o sinal de saída do filtro, capacitor ou resistor, e de seus valores de capacitância e resistência.

7.3 Filtros usando circuitos RC

Quando alimentamos um circuito RC em série com uma voltagem alternada de frequência angular ω e amplitude V_0, as amplitudes das voltagens no capacitor (V_{0C}) e no resistor (V_{0R}) serão dadas por:

$$V_{0C} = \frac{X_C}{Z} V_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} V_0 \,, \tag{7.3}$$

e

$$V_{0R} = \frac{R}{Z} V_0 = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} V_0 \,. \tag{7.4}$$

Vemos então que V_{0C} e V_{0R} dependem da frequência ω, mas de maneira oposta. No capacitor, a amplitude $V_{0C} \to V_0$ quando a frequência angular $\omega \to 0$. Conforme a frequência aumenta, a razão V_{0C}/V_0 vai diminuindo, e no limite em que $\omega \to \infty$, $V_{0C} \to 0$. No resistor observamos o comportamento oposto. Para frequências baixas a amplitude V_{0R} é baixa. Esta amplitude aumenta com o aumento da frequência, e no limite de frequências muito altas, $V_{0R} \to V_0$. Assim, de acordo com a faixa de frequências que queremos eliminar do sinal de entrada, escolhemos o dispositivo de onde iremos extrair o sinal de saída. Para eliminarmos frequências altas, devemos utilizar o sinal de tensão no capacitor como saída (filtro passa-baixa), e se quisermos eliminar frequências baixas, usamos o sinal do resistor como saída (filtro passa-alta).

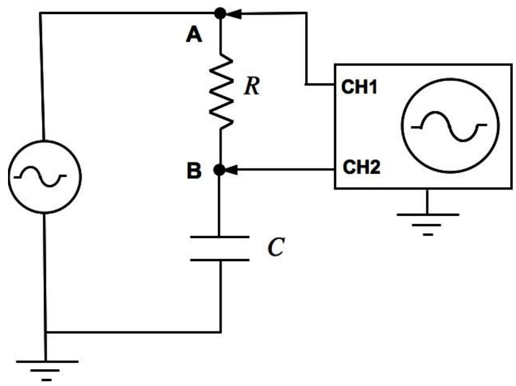

Figura 7.1: Representação esquemática de um filtro passa-baixa construído a partir de um circuito RC em série, alimentado com corrente alternada.

7.3.1 Filtro passa-baixa

Vamos analisar um circuito RC em série atuando como um filtro passa-baixa. Para isto devemos comparar o sinal de entrada, fornecido pelo gerador de funções, com o sinal de saída, extraído do capacitor. Isto é feito montando o circuito mostrado na figura 7.1.

Para este circuito apresentado, a amplitude da voltagem no capacitor $V_{0\mathrm{C}}$ é dada pela equação 7.3. A razão entre as amplitudes $V_{0\mathrm{C}}$ e V_0 será chamada de A_{PB}, representando a razão entre as amplitudes de tensão de entrada e saída, e será expressa como:

$$A_{\mathrm{PB}} \equiv \frac{V_{0\mathrm{C}}}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \,. \tag{7.5}$$

A equação 7.5 mostra que para frequências próximas de zero, a voltagem no capacitor tem a mesma amplitude que a voltagem do gerador ($A_{\mathrm{PB}} \cong 1$), ou seja, o sinal não é atenuado. Por sua vez, à medida que a frequência cresce, a voltagem no capacitor diminui, o que significa que esta voltagem apresenta uma atenuação em relação ao sinal do gerador. Se tomarmos o limite da frequência tendendo a infinito, a amplitude A_{PB} tende a zero e neste caso a voltagem no capacitor é totalmente atenuada. Portanto, somente sinais com frequências muito baixas não terão suas amplitudes diminuídas.

7.3.2 Filtro passa-alta

Vamos analisar agora um circuito RC em série atuando como um filtro passa-alta. Devemos agora comparar o sinal fornecido pelo gerador de funções com o sinal de saída extraído do resistor. Isto será feito montando o circuito mostrado na figura 7.2. Ele é obtido a partir do circuito da figura 7.1 simplesmente invertendo as posições do resistor e do capacitor.

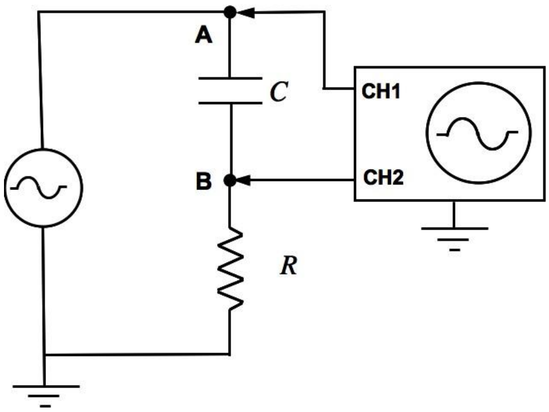

Figura 7.2: Representação esquemática de um filtro passa-alta construído a partir de um circuito RC em série, alimentado com corrente alternada.

Para este circuito a amplitude da voltagem no resistor $V_{0\text{R}}$ será dada pela equação 7.4. Definimos a razão entre as amplitudes $V_{0\text{R}}$ e V_0 como sendo A_{PA}, que pode ser expressa na forma:

$$A_{\text{PA}} \equiv \frac{V_{0\text{R}}}{V_0} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \,. \tag{7.6}$$

A equação 7.6 mostra que o filtro passa-alta tem uma dependência com ω oposta àquela observada no caso do filtro passa-baixa. Sinais com frequências baixas são fortemente atenuados enquanto os sinais com frequências muito altas são transmitidas com pequena (ou nenhuma) atenuação.

7.3.3 Frequência de corte

Nas seções anteriores, falamos de frequências "muito altas" e "muito baixas", mas ao utilizarmos este tipo de expressão devemos especificar em relação a qual valor é feita a comparação. É costume definir para estes filtros uma frequência, chamada de frequência angular de corte, que especifica a faixa de frequências a ser filtrada. Esta frequência (ω_{c}) é definida como aquela que torna a reatância capacitiva igual à resistência do circuito, ou seja, o valor de ω que satisfaz a condição $X_{\text{C}} = R$. Usando esta definição encontramos

$$X_{\text{C}} = \frac{1}{\omega_{\text{c}} C} = R \,, \tag{7.7}$$

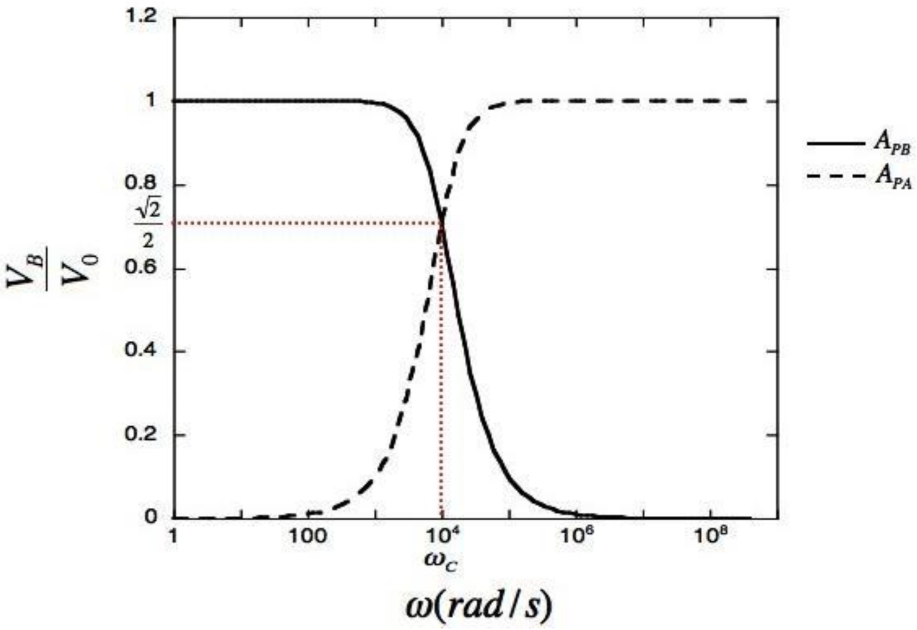

Figura 7.3: Curvas características dos filtros passa-alta (A_{PA}) e passa-baixa (A_{PB}) construídos com um circuito RC que utiliza $R = 1$ kΩ e $C = 100$ nF. V_{B} representa $V_{0\mathrm{R}}$ para o filtro passa-altas e $V_{0\mathrm{C}}$ para o passa-baixas. A frequência angular de corte para este caso é $\omega_{\mathrm{c}} = 10^4$ rad/s. Note que o eixo x está em escala logarítimica.

o que nos leva a:

$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{1}{RC}\,. \tag{7.8}$$

A partir da equação 7.8 obtemos a frequência linear de corte, ou simplesmente frequência de corte, dada por:

$$f_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2\pi RC}. \tag{7.9}$$

Na frequência de corte, tanto A_{PB} quanto A_{PA} tem o mesmo valor:

$$A_{\mathrm{PA}} = A_{\mathrm{PB}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,707\,. \tag{7.10}$$

Na frequência de corte a voltagem do sinal no capacitor ou no resistor atinge 70,7% do seu valor máximo. Isto pode ser visto na figura 7.3 onde mostramos o comportamento de A_{PA} e A_{PB} com a frequência angular para um circuito RC, com $R = 1$ kΩ e $C = 100$ nF. Este tipo de gráfico é denominado curva característica do filtro.

7.3.4 Transmitância e diagrama de Bode

O funcionamento de um filtro pode ser descrito por sua curva característica, mas também pode ser representado por uma grandeza chamada função de transferência. Esta é uma função complexa, definida como a razão entre a tensão (complexa) de saída (a voltagem sobre o resistor ou sobre o capacitor, dependendo do filtro utilizado) e a tensão (complexa) de entrada (a voltagem do gerador). Como toda grandeza complexa, há informação tanto em seu módulo (que será simplesmente a razão entre as amplitudes dos sinais) quanto em sua fase (que será a diferença de fase entre os sinais).

Muitas das vezes estamos mais interessados nas amplitudes do que na diferença de fase. A partir da função de transferência definimos então a transmitância de um filtro $T(\omega)$ (também chamada de resposta em potência) como sendo o quadrado da razão entre as amplitudes de saída (V_{0S}) e de entrada (V_{0E}):

$$T(\omega) = \left[\frac{V_{0S}(\omega)}{V_{0E}(\omega)}\right]^2. \tag{7.11}$$

Grandezas como a transmitância (que é uma razão entre voltagens ao quadrado) são comumente expressas em termos de decibéis (dB) da seguinte maneira:

$$T_{dB}(\omega) = 10\log[T(\omega)]. \tag{7.12}$$

Para os filtros passa-baixa e passa-alta baseados no circuito RC, as transmitâncias são dadas respectivamente por:

$$T_{PB}(\omega) = \frac{1}{1+(\omega RC)^2}, \tag{7.13}$$

e

$$T_{PA}(\omega) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{(\omega RC)^2}}. \tag{7.14}$$

Tomemos como exemplo o filtro passa-baixa; este filtro possui transmitância máxima T_{max} = 1 para ω = 0 e cai para zero como $1/(\omega RC)^2$ na medida em que $\omega \to \infty$. Na frequência de corte, ω_c = 1/RC, a transmitância cai à metade do máximo. Este comportamento é mais fácil de ser visualizado em um gráfico que apresenta a transmitância em decibéis (ver equação 7.12) em função do logaritmo de ωRC, chamado *diagrama de Bode*, como o mostrado na figura 7.4. Há três características a serem observadas neste diagrama para um filtro passa-baixas:

- Para $\omega \ll \omega_c$, a resposta do filtro é praticamente plana e a transmitância é de 0 dB;
- para $\omega = \omega_c$, a transmitância é -3 dB ($10\log(1/2) \cong -3,010$). Neste ponto temos $\log(\omega_c RC) = \log(1) = 0$;
- para $\omega \gg \omega_c$, a transmitância cai a uma taxa de -20 dB/dec (decibéis por década), com $10\log[1/(\omega RC)^2] = -20\log(\omega)$ + const.

A faixa de frequências entre 0 e ω_c é chamada largura de banda do filtro. No diagrama de Bode a dependência com $1/\omega^2$ em alta frequência (para o filtro passa-baixas) é muito mais evidente do que em um gráfico em escala linear.

Diagramas de Bode para filtros passa-alta terão características semelhantes, mas inversas em relação à frequência de corte. O filtro passa-altas também apresenta transmitância de -3 dB em $\omega = \omega_c$. Para $\omega \ll \omega_c$ a transmitância sobe a uma taxa de 20 dB/dec, e para $\omega \gg \omega_c$ ela é aproximadamente constante com valor T_{dB} = 0 dB (ver figura 7.5).

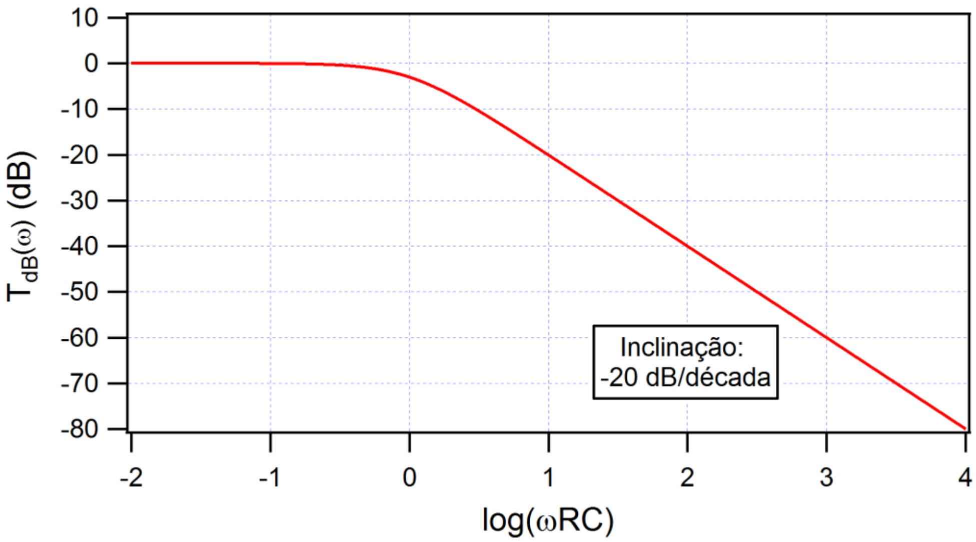

Figura 7.4: Diagrama de Bode para filtros passa-baixas.

7.4 Procedimentos Experimentais

7.4.1 Procedimento I: filtro passa-alta

Neste procedimento vamos montar um filtro passa-alta, realizar medidas para traçar sua curva característica e a partir dela obter o valor da frequência de corte, comparando com seu valor nominal.

1. Monte o circuito da figura 7.2, utilizando um resistor de 1 kΩ e um capacitor de 100 nF. Meça com o multímetro os valores de R e C.

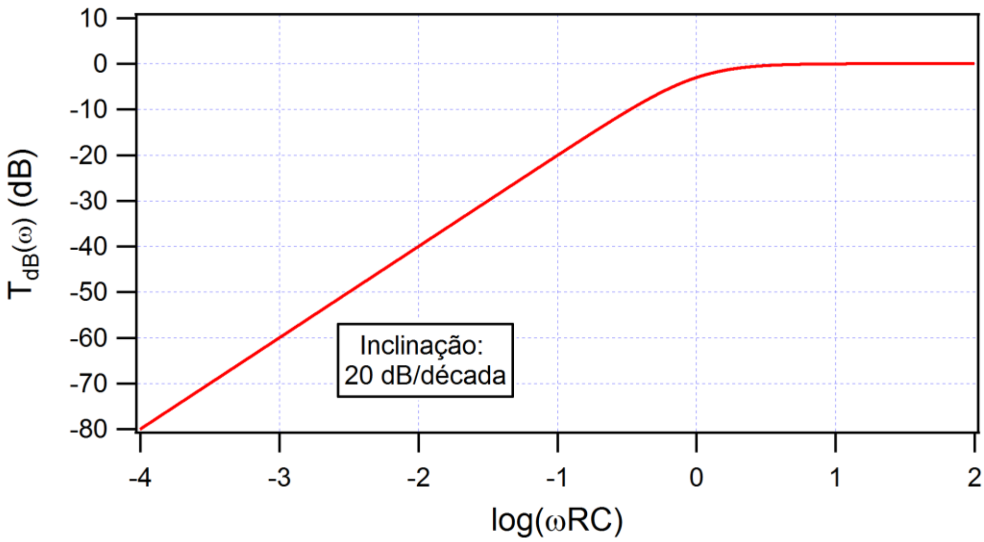

Figura 7.5: Diagrama de Bode para filtros passa-altas.

2. Ligue os equipamentos e ajuste o gerador para que ele alimente o circuito com um sinal senoidal com uma frequência de cerca de 200 Hz e amplitude próxima a $V_0 = 4$ V. Meça a frequência do sinal do gerador, anotando o valor na Tabela 1. Lembre-se que o valor de frequência mostrado no gerador é apenas uma **indicação**, para medí-lo deve ser utilizado o osciloscópio.

3. Meça a amplitude de tensão no resistor (V_{0R}, medido no canal 2) e a amplitude de tensão no gerador (V_0, medido no canal 1), anotando ambos os valores na Tabela 1. Complete a primeira linha da tabela calculando o valores de $\log(f)$ e de A_{PA}. Calcule também o valor esperado para A_{PA}, utilizando os valores de f, R e C medidos.

4. Mude a frequência do sinal do gerador para 500 Hz e **verifique se a amplitude de tensão do gerador permanece igual a 4 V**. Caso esta amplitude tenha se alterado, **ajuste o gerador para que ela volte a ter o valor inicial**. Com a amplitude ajustada, repita as medidas e os cálculos realizados no item anterior.

5. Repita este procedimento para as frequências de 1 kHz, 2 kHz, 5 kHz, 10 kHz, 20 kHz e 50 kHz.

6. No retículo milimetrado do seu relatório, faça o gráfico dos valores medidos de A_{PA} vs. log(f/Hz) e obtenha o valor da frequência de corte para este filtro. Inclua também uma outra curva para os valores esperados de A_{PA}. Compare os valores experimentais com os valores esperados.

7.4.2 Procedimento II: filtro passa-baixa

Neste procedimento vamos montar um filtro passa-baixa utilizando os mesmos componentes do procedimento I, realizar medidas para traçar sua curva característica e a partir dela obter o valor da frequência de corte, comparando com seu valor nominal e com o valor obtido no procedimento anterior. A partir destes mesmos dados, traçaremos também o diagrama de Bode, obtendo os valores da frequência de corte e da inclinação da curva de transmitância para $\omega \gg \omega_c$.

1. Monte o circuito da figura 7.1, utilizando os mesmos componentes do procedimento anterior.

2. Ligue os equipamentos e ajuste o gerador para que ele alimente o circuito com um sinal senoidal com uma amplitude próxima a $V_0 = 4$ V.

3. Repita o procedimento utilizado com o filtro passa-alta. Para cada frequência sugerida abaixo, meça: a frequência da tensão do gerador (f), a amplitude de tensão no capacitor (V_{0C}) e a amplitude de tensão no gerador (V_0), e anote os valores na Tabela 2. Calcule o valores de $\log(f)$, $\log(\omega RC)$, de A_{PB} e de T_{dB}. Lembre-se que toda a vez que a frequência for alterada deve-se verificar que a amplitude de tensão do gerador continua em 4 V, alterando sua tensão de saída se necessário. Valores sugeridos para a frequência: 200 Hz, 500 Hz, 1 kHz, 2 kHz, 5 kHz, 10 kHz, 20 kHz e 50 kHz.

4. No mesmo retículo milimetrado onde foi feito o gráfico de A_{PA}, faça o gráfico de A_{PB} vs. log(f/Hz) e obtenha o valor da frequência de corte para este filtro. Compare este valor com seu valor nominal e com o valor obtido para o filtro passa-alta.

5. A partir dos valores de $\log(\omega RC)$ e de T_{dB} da Tabela 2, faça o diagrama de Bode (gráfico de T_{dB} vs. $\log[\omega RC]$) para este circuito. Obtenha os valores da frequência de corte (comparando com o valor obtido a partir da curva característica) e da inclinação da curva para $\omega \gg \omega_c$ (comparando com o valor esperado).